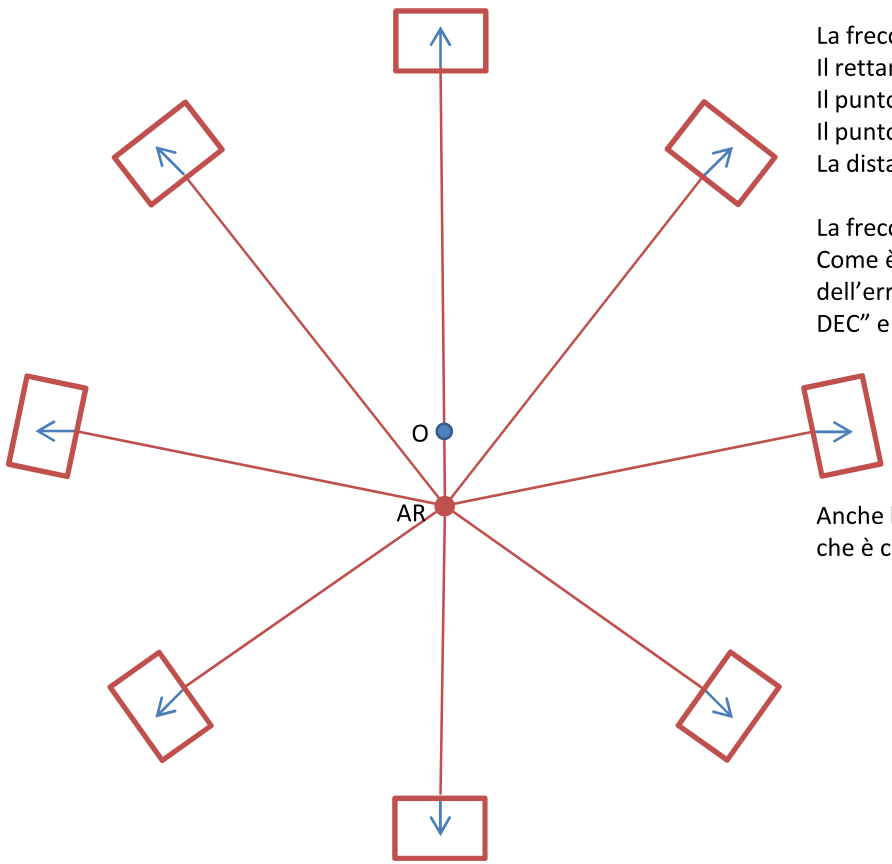
PIU' DI QUELLO CHE VORRESTE SAPERE SULLA ROTAZIONE DI CAMPO – PAGINA 1

Risultati di un ritardo di un'ora dell'aereo Roma-Bari, per la serie "come passare il tempo in attesa al gate"…



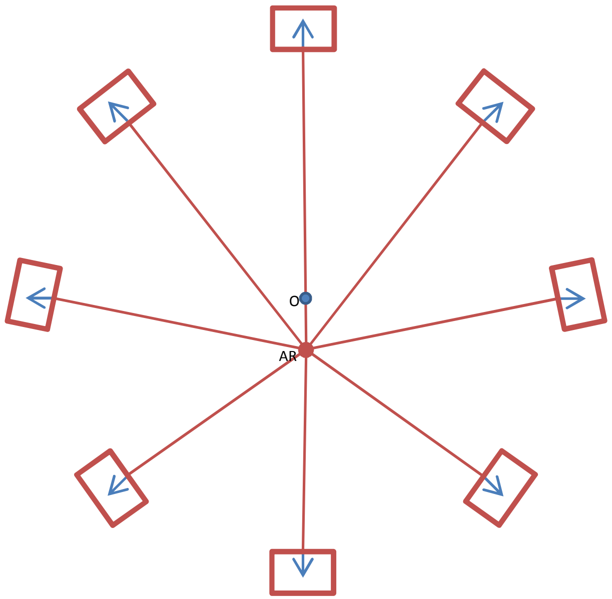
Iniziamo cercando di visualizzare la questione:

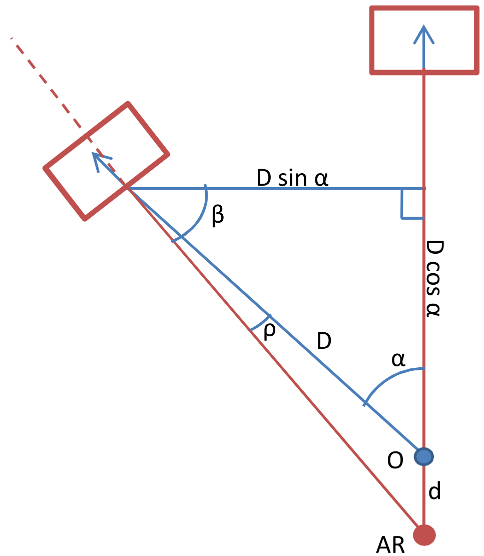
La freccetta è l'oggetto che stiamo riprendendo (la forma scelta è per evidenziarne l'orientamento)
Il rettangolo rosso è l'inquadratura di ripresa
Il punto blu O è il polo nord
Il punto rosso AR è il punto verso il quale è orientato l'asse AR della montatura
La distanza fra punto blu e punto rosso è l'errore di stazionamento (nell'esempio solo in altezza)

La freccetta nell'arco della giornata siderale compie un giro di 360°
Come è evidente dal disegno, la distanza fra il punto AR e la base della freccetta, a causa dell'errore di stazionamento , non sarà costante (è quello che viene evidenziato come "deriva in DEC" e che è sfruttato nel "metodo delle derive "o "Bigourdan "per stazionare)

Anche l'angolo fra la freccia e il rettangolo dell'inquadraturà varierà nel tempo. E' questo l'effetto che è chiamato "rotazione di campo"

PIU’ DI QUELLO CHE VORRESTE SAPERE SULLA ROTAZIONE DI CAMPO – PAGINA 2





Cerchiamo ora di calcolare come varia l’angolo fra soggetto inquadrato e inquadratura, cioè la rotazione di campo, a partire da un dettaglio dell’immagine precedente.
D è la distanza del soggetto dal polo (non in gradi ma è una misura lineare che sarà chiarita più avanti)
d è l’errore di stazionamento (come sopra).
Si vede immediatamente che vale la relazione:

$$\rho(\alpha) = \beta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Osservando poi che l’angolo β è l’arcotangente del rapporto fra lato opposto e lato adiacente del triangolo rettangolo cui appartiene, si ha:

$$\rho(\alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{D\cos\alpha + d}{D\sin\alpha}$$

PIU' DI QUELLO CHE VORRESTE SAPERE SULLA ROTAZIONE DI CAMPO – PAGINA 3

Vediamo ora di studiare come varia l'angolo ρ al variare di α. Per fare questo iniziamo calcolando la "derivata prima" di ρ(α).
La derivata prima ci consentirà di capire per quale valore di α si hanno i massimi e i minimi di ρ (sono i punti in cui si annulla la derivata prima)

$$\rho'(\alpha)=1+\frac{(-D\sin\alpha\cdot D\sin\alpha)-((D\cos\alpha+d)\cdot D\cos\alpha)}{D^2\sin^2\alpha}\cdot\left[\arctan\left(\frac{D\cos\alpha+d}{D\sin\alpha}\right)\right]'=1-\frac{\left(D^2\sin^2\alpha\right)+\left(D^2\cos^2\alpha+d\cdot D\cos\alpha\right)}{D^2\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{D\cos\alpha+d}{D\sin\alpha}\right)^2}=$$

$$\rho'(\alpha)=1-\frac{D^2+d\cdot D\cos\alpha}{D^2\sin^2\alpha}\cdot\frac{D^2\sin^2\alpha}{D^2\sin^2\alpha+(D\cos\alpha+d)^2}=1-\frac{D^2+d\cdot D\cos\alpha}{D^2\sin^2\alpha+D^2\cos^2\alpha+d^2+2dD\cos\alpha}=1-\frac{D^2+d\cdot D\cos\alpha}{D^2+d^2+2dD\cos\alpha}$$

$$\rho'(\alpha)=1-\frac{D^2+d\cdot D\cos\alpha}{D^2+d^2+2dD\cos\alpha}=1-\frac{D^2+2dD\cos\alpha+d^2-\left(dD\cos\alpha+d^2\right)}{D^2+d^2+2dD\cos\alpha}=1-1+\frac{dD\cos\alpha+d^2}{D^2+d^2+2dD\cos\alpha}=\frac{dD\cos\alpha+d^2}{D^2+d^2+2dD\cos\alpha}$$

$$\rho'(\alpha)=\frac{dD\cos\alpha+d^2}{D^2+d^2+2dD\cos\alpha}$$

$$\rho'(\alpha)=0\Leftrightarrow dD\cos\alpha+d^2=0\Leftrightarrow\alpha=\arccos(-d/D)$$

La rotazione di campo ha cioè il suo massimo per α pari ad arcos(d/D), cioè nella situazione rappresentata a destra

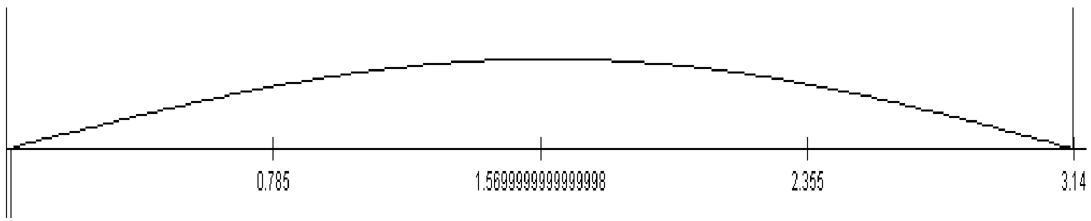
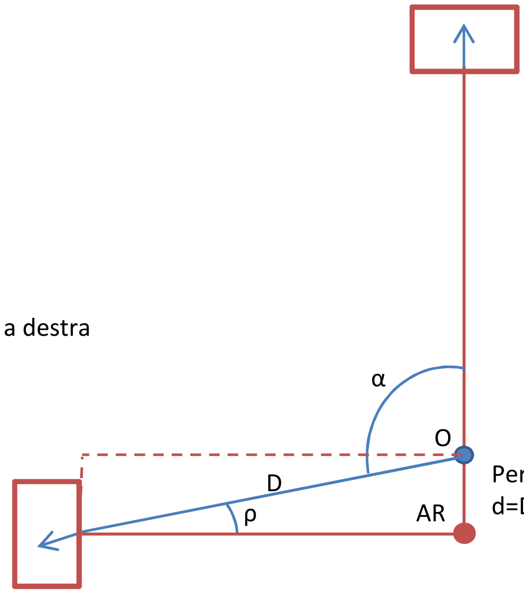


Grafico di ρ(α). Si intuisce che il massimo è poco oltre i 90°



Per questo valore di α
d=D cos α

PIU’ DI QUELLO CHE VORRESTE SAPERE SULLA ROTAZIONE DI CAMPO – PAGINA 4

Poiché però a chi fotografa non interessa tanto il valore dell’angolo di rotazione ma soprattutto quanto rapidamente avviene la rotazione (poiché è questo che discrimina se la posa viene “mossa”), è molto più importante indagare proprio su tale velocità. Essa è come è noto proporzionale alla derivata prima dell’angolo. Per studiare massimi e minimi della velocità deriviamo pertanto nuovamente ricavando così la derivata seconda di $\rho(\alpha)$ che è la derivata prima della velocità.

$$\rho''(\alpha) = \frac{-dD\sin\alpha \cdot \left(D^2 + d^2 + 2dD\cos\alpha\right) + \left(dD\cos\alpha + d^2\right) \cdot 2dD\sin\alpha}{\left(D^2 + d^2 + 2dD\cos\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{-dD^3\sin\alpha - d^3D\sin\alpha - 2d^2D^2\sin\alpha\cos\alpha + 2d^2D^2\sin\alpha\cos\alpha + 2d^3D\sin\alpha}{\left(D^2 + d^2 + 2dD\cos\alpha\right)^2} = \frac{\left(d^3D - dD^3\right)\sin\alpha}{\left(D^2 + d^2 + 2dD\cos\alpha\right)^2}$$

$$\rho''(\alpha) = \frac{\left(d^3D - dD^3\right) \cdot \sin\alpha}{\left(D^2 + d^2 + 2dD\cos\alpha\right)^2}$$

Si vede subito che in questo caso la derivata si annulla per $\alpha = 0$ o 180.
Quindi, per un errore di stazionamento di altezza, avrò la massima velocità di rotazione di campo allo zenit; mentre, per un errore di azimut, all’orizzonte.

PIU' DI QUELLO CHE VORRESTE SAPERE SULLA ROTAZIONE DI CAMPO – PAGINA 5

Concludiamo ora con un calcolo pratico della rotazione di campo, per vedere come applicare le formule ricavate.
Il caso di studio un po' particolare, ed è la causa che mi ha fatto studiare il problema:
quanto vale la rotazione di campo per una ripresa planetaria? Con quale precisione è necessario stazionare in tal caso?

Quello che faremo sarà calcolare la rotazione di campo per un soggetto che si muove lungo l'equatore celeste, nel punto di culminazione (dove come visto si ha la massima velocità di rotazione di campo), considerando solo un errore di stazionamento in altezza. Ci porremo cioè nella peggiore condizione possibile in modo da massimizzare la rotazione di campo.

Iniziamo calcolando la velocità di rotazione di campo nel punto di massimo, cioè per α=0 (passaggio per il meridiano locale)
Consideriamo però ora α in funzione del tempo (T è la durata in secondi del giorno siderale) per poterlo poi rapportare alla durata della ripresa che è in secondi. Abbiamo quindi:

$$\alpha(t) = \frac{2\pi \cdot t}{T}$$

$$\rho'(t) = \rho'(\alpha(t)) = \rho'(\alpha) \cdot \alpha'(t) = \frac{dD\cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) + d^2}{D^2 + d^2 + 2dD\cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right)} \cdot \frac{2\pi}{T}$$

Che, per t=0, cioè sul meridiano locale, diventa:

$$\rho'(0) = \frac{dD + d^2}{(D+d)^2} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{d \cdot (D+d)}{(D+d)^2} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{d}{(D+d)} \cdot \frac{2\pi}{T}$$

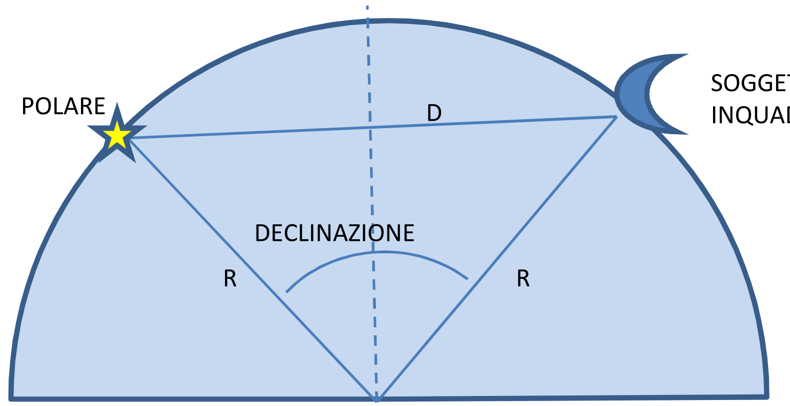
Ora, poiché in generale vale la successiva diseguaglianza, avremo che, considerando il valore sopra ricavato nei nostri calcoli, otterremo sempre un'approssimazione per eccesso della rotazione di campo effettiva

$$\Delta\rho = \int_{\Delta t} \rho'(t)dt \le \rho'_{MAX} \cdot \Delta t$$

PIU' DI QUELLO CHE VORRESTE SAPERE SULLA ROTAZIONE DI CAMPO – PAGINA 6

In definitiva avremo

$$\Delta\rho \le \frac{d}{D+d} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t$$



Vediamo ora di capire quanto valgono D e d. Consideriamo la sezione della sfera celeste rappresentata a fianco, si ricava quasi immediatamente che vale (DEC è la declinazione dell'soggetto osservato e ERR è l'errore di stazionamento in altezza, visto che abbiamo considerato solo quello)

$$D = 2\left(R \cdot \sin(DEC/2)\right)$$

$$d = 2\left(R \cdot \sin(ERR/2)\right)$$

Consideriamo che avremo rotazione di campo apprezzabile nella nostra ripresa solo se (vedi figura a lato) tale rotazione causerà lo spostamento di almeno un pixel sul bordo del soggetto inquadrato (il cui diametro è definito pari a 2r pixel)

Quindi avremo rotazione di campo se e solo se:

$$r \cdot \Delta\rho \ge 1$$

PIU' DI QUELLO CHE VORRESTE SAPERE SULLA ROTAZIONE DI CAMPO – PAGINA 7

In conclusione, ponendo:

Sin(ERR/2)=ERR/2 perché ERR è un angolo molto piccolo per ipotesi,
DEC=90° (nel caso in esame abbiamo scelto un soggetto sull'equatore celeste)
T= 86164 secondi (giorno siderale)
Δt=120 secondi, cioè immaginiamo un'esposizione di due minuti

avremo:

$$\Delta\rho \leq \frac{ERR}{2\sin(DEC/2)+ERR} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t < \frac{ERR}{\sqrt{2}+ERR} \cdot \frac{2\pi}{86164} \cdot 120$$

Per quanto detto rileveremo quindi rotazione di campo solo se (trascurando ERR rispetto a radice di 2)

$$\frac{ERR}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\pi}{86164} \cdot 120 \cdot r \geq 1$$

Cioè se (con r espresso in pixel e ERR in radianti)

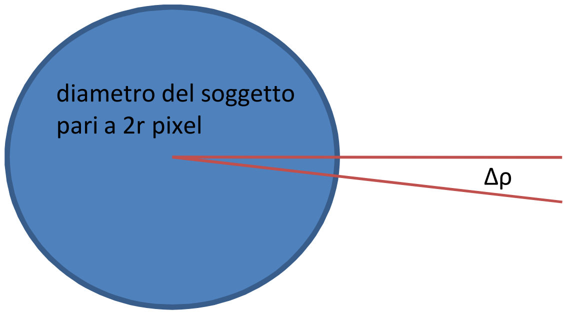
$$r \cdot ERR \geq 162$$

Ad esempio, per un errore di stazionamento di 2° (circa quattro volte l'errore che si commette puntando la polare invece del nord reale), e un pianeta di 80 pixel di raggio nella nostra ripresa, si ha r*ERR=2,79 , quindi molto meno del valore calcolato in alto.
Per avere rotazione di campo evidente, considerando una ripresa da 120 sec sulla luna (quindi con tutto il sensore occupato), un sensore 1024x768 (semidiagonale pari quindi a 640 pixel), sarà necessario almeno un errore di 162/640=0,253 radianti, cioè 14° (!)
Insomma nelle riprese planetarie uno stazionamento "spannometrico" è più che sufficiente.
La rotazione di campo diventa invece rilevante per sensori con grande definizione e tempi di posa dell'ordine della decina di minuti, cioè nelle riprese deep.
A partire dalle formule ricavate è quindi possibile rendersi conto della cura con la quale è necessario stazionare in ogni circostanza, anche se l'obbiettivo dei calcoli presentati è solo di comprendere quantitativamente il problema. Spero che questo lavoro possa essere utile a qualcuno. Cieli sereni!

PIU' DI QUELLO CHE VORRESTE SAPERE SULLA ROTAZIONE DI CAMPO – PAGINA 8

PRECISAZIONI:

Al di là dell'analisi, valida in generale, per il calcolo specifico sono state fatte alcune considerazioni inespresse che per chi volesse cimentarsi in calcoli più generali vanno chiarite.
Per la ripresa planetaria, la rotazione di campo avviene fra frame e frame, poiché il tempo di posa di ciascun frame è sicuramente troppo esiguo per evidenziare qualsivoglia rotazione. Poiché inoltre anche il tempo di esposizione totale rimane dell'ordine dei minuti, ha senso considerare il valore massimo della velocità di rotazione o comunque un valore singolo per i calcoli approssimati della rotazione. Infine, poiché i singoli frame vengono generalmente sommati allineando i dischi planetari, la rotazione di campo avverrà rispetto al centro del soggetto. Se però in una ripresa ad esempio lunare, che occupa generalmente l'intero frame, si allineano i frame stessi considerando un particolare sul bordo del frame, gli effetti della rotazione appariranno in maniera più evidente sul bordo opposto ed in misura raddoppiata (vedi figura)



$$rotazione\_di\_campo\_in\_pixel = r \cdot \Delta\rho$$

$$rotazione\_di\_campo\_in\_pixel = 2r \cdot \Delta\rho$$

Per la ripresa deepsky, dove la rotazione che interessa è quella all'interno del singolo frame poiché quella fra frame viene agevolmente corretta in fase di somma, bisognerà tenere conto anche del punto del campo di ripresa in base al quale avviene la guida, poiché in maniera analoga a quanto detto sopra il valore di r da considerare sarà sempre la distanza massima in pixel fra il punto del campo rispetto al quale avviene la guida e il bordo più lontano del campo di ripresa stesso.

Infine bisognerà valutare la rotazione di campo in base al valore di DEC del soggetto ripreso, poiché solo per i soggetti planetari può valere l'approssimazione precedentemente assunta di considerare un punto prossimo all'equatore celeste